

**Gheorghe Boroica****Nicolae Mușuroia****Vasile Pop****Florin Bojor****Cristian Heuberger**

Colecția „Matematică de excelență pentru clasa a XI-a, Olimpiade și centre de excelență” conține șase volume pentru liceu, destinate fiecărui an de studiu, și se adresează tuturor pasionaților de matematică, de orice vîrstă. Ea vine să umple un gol care era existent de ani de zile, cu foată înfățișat de publicații matematice din ultima vîreme. Colecția noastră aduce înțelegeri și în totul ciclului de învățare pentru grupele de performanță pe care le-am desfășurat în ultimii ani, în cadrul unei colectivă care a realizat un proiect finanțat din fonduri europene. Acestea le acordădate în cîrcurile actuale trăiesc mult cunoștințele din programele scolare, recunosc elelor peisajul rezultat la finalul studiilor secundare, la cîteva luni înaintea admiterii la universitate sau la concursul de admitere la licență.

## MATEMATICĂ DE EXCELENȚĂ

pentru concursuri, olimpiade și centre de excelență

Materialul suplimentar este prezentat compus din punct de vedere teoretic și este format de multe exemple, probleme și exerciții (rezolvate, în domă categorii) și teste de evaluare, care ilustrează teoria într-un mod lucru abordat și îl conduce pe elev să devină mai bune în matematică. În cadrul acestuia sunt prezentate și rezolvările unei maturități, precum și ale unei olimpiade internaționale de matematică.

### Clasa a XI-a

## Volumul II. Analiză matematică

Ediția a II-a, revizuită

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚA®  
supersucces



<b>TESTE INITIALE.....</b>	<b>9</b>
<b>SOLUȚIILE TESTELOR INITIALE .....</b>	<b>10</b>
1. MULȚIMI DENSE (GHEORGHE BOROICA, VASILE POP) .....	14
2. ȘIRURI (FLORIN BOJOR) .....	35
3. ȘIRURI RECURENTE (NICOLAE MUŞUROIA, VASILE POP) .....	77
4. LIMITE DE FUNCȚII (NICOLAE MUŞUROIA, FLORIN BOJOR) .....	117
5. CONTINUITATE (GHEORGHE BOROICA, NICOLAE MUŞUROIA) .....	141
6. PROPRIETATEA LUI DARBOUX (CRISTIAN HEUBERGER).....	167
7. TEOREMELE DE MEDIE ALE CALCULULUI DIFERENȚIAL (GHEORGHE BOROICA, NICOLAE MUŞUROIA).....	189
8. FUNCȚII CONVEXE (GHEORGHE BOROICA, FLORIN BOJOR) .....	208
9. POLINOMUL TAYLOR ASOCIAȚ UNEI FUNCȚII (GHEORGHE BOROICA).....	229
10. ECUAȚII TRANSCENDENTE (NICOLAE MUŞUROIA).....	250
11. ECUAȚII FUNCȚIONALE ÎN ANALIZA MATEMATICĂ (VASILE POP).....	270
12. METODE TOPOLOGICE ÎN PROBLEME DE GEOMETRIE (VASILE POP).....	292
<b>TESTE FINALE .....</b>	<b>312</b>
<b>SOLUȚIILE TESTELOR FINALE .....</b>	<b>313</b>
<b>BIBLIOGRAFIE .....</b>	<b>318</b>

- 1.1.1. Acestea sunt funcții de numere reale: a)  $f(x) \geq 0, \forall x \geq 0$ ; b)  $f(x+y) = f(x) + f(y), \forall x, y \in \mathbb{R}$ .
- 1.1.2. Fie  $f, g, h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  funcții periodice, de perioade 7, 19, respectiv 31. Arătați că dacă funcția  $f+g+h$  este constantă, atunci funcțiile  $f, g, h$  sunt constante.

- 1.2.4. Se consideră mulțimea de numere rationale:  $A = \left\{ \frac{4mn}{m^2 + 2n^2} \mid m, n \in \mathbb{N} \right\}$ . Determinați cel mai mare număr real  $a$  și cel mai mic număr real  $b$  astfel încât  $A \subset [a, b]$ .

**TESTUL I.1**

**I.1.1.** Fie  $f: \mathbb{N}^* \rightarrow \mathbb{N}^*$  o funcție injectivă și sirul  $(x_n)_{n \geq 1}$ ,  $x_n = \sum_{k=1}^n \frac{f^2(k)}{k^3}$ . Arătați că pentru orice  $M > 0$  există  $m \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $x_n > M$ ,  $\forall n \geq m$ .

**I.1.2.** Pentru fiecare  $n \in \mathbb{N}^*$ , considerăm  $a_n = \left\{ \left( 2 + \sqrt{3} \right)^n \right\}$ . Arătați că există  $n_0 \in \mathbb{N}^*$  astfel încât  $|a_n - 1| < 10^{-10}$ ,  $\forall n \geq n_0$ .

**I.1.3.** Fie mulțimea  $A = \left\{ \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2 + 2} \mid x, y \in \mathbb{R} \right\}$ . Determinați cel mai mic număr real  $\alpha$  cu proprietatea că  $z \leq \alpha$ ,  $\forall z \in A$ .

**I.1.4.** Determinați intervalul  $[a, b]$  de lungime minimă astfel ca pentru orice numere reale strict pozitive  $x_1, x_2, \dots, x_{10}$  să avem:

$$a \leq \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_9}{x_9 + x_{10}} + \frac{x_{10}}{x_{10} + x_1} \leq b.$$

Vasile Pop

**TESTUL I.2**

**I.2.1.** Se consideră sirul  $(a_n)_{n \geq 1}$  cu  $a_1 = \frac{1}{3}$ ,  $a_2 = \frac{5}{6}$  și  $(n+1)a_{n+1} = (n-1)a_n$ ,  $\forall n \geq 2$ .

Arătați că  $a_1 + a_2 + \dots + a_n < 2$ .

Lucian Dragomir, Gazeta Matematică, nr. 6-7-8, 2012

**I.2.2.** Determinați funcția  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  cu proprietățile:

- a)  $f(x) \geq 0$ ,  $\forall x \geq 0$ ;
- b)  $f(x+y) = f(x) + f(y)$ ,  $\forall x, y \in \mathbb{R}$ .

**I.2.3.** Fie  $f, g, h: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$  funcții periodice, de perioade 7, 19, respectiv 31. Arătați că dacă funcția  $f+g+h$  este constantă, atunci funcțiile  $f, g, h$  sunt constante.

**I.2.4.** Se consideră mulțimea de numere raționale  $A = \left\{ \frac{4mn}{m^2 + 2n^2} \mid m, n \in \mathbb{N}^* \right\}$ . Determinați cel mai mare număr real  $a$  și cel mai mic număr real  $b$  astfel încât  $A \subset [a, b]$ .

Vasile Pop

**TESTUL I.1**

**R.I.1.1.** Sirul dat este strict crescător deoarece  $x_{n+1} - x_n = \frac{f^2(n+1)}{(n+1)^3} > 0$ . Cum  $f$  este injectivă, avem  $x_{2^n} - x_n = \sum_{k=1}^n \frac{f^2(k+n)}{(k+n)^3} \geq \frac{1}{(2n)^3} \cdot \sum_{k=1}^n f^2(k+n) \geq \frac{1}{8n^3}(1^2 + 2^2 + \dots + n^2) = \frac{(2n+1)(n+1)}{48n^2} > \frac{2n \cdot n}{48n^2} = \frac{1}{24}$ ,  $\forall n \geq 1$ . Atunci  $x_{2^n} - x_1 = \sum_{k=1}^n (x_{2^k} - x_{2^{k-1}}) > \sum_{k=1}^n \frac{1}{24} = \frac{n}{24}$ , deci  $x_{2^n} > x_1 + \frac{n}{4} \geq 1 + \frac{n}{4} > \frac{n}{4}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Deoarece relația  $\frac{n}{4} \geq M$  este adevărată pentru orice  $n \geq [4M] + 1$ , deducem că  $x_{2^n} > M$ ,  $\forall n \geq [4M] + 1 = n_0$ . Luăm  $m = 2^{n_0} \in \mathbb{N}^*$  și se obține concluzia, deoarece sirul este și crescător.

**R.I.1.2.** Avem  $\{a\} = a - [a]$ , unde  $[a]$  este partea întreagă a lui  $a$ . Aplicând binomul lui Newton rezultă că, pentru orice  $n \in \mathbb{N}$ , există  $x_n, y_n \in \mathbb{Z}$  astfel ca:

$$(2 + \sqrt{3})^n = x_n + y_n \cdot \sqrt{3} \text{ și } (2 - \sqrt{3})^n = x_n - y_n \cdot \sqrt{3}.$$

Deoarece  $(2 + \sqrt{3})^n + (2 - \sqrt{3})^n = 2x_n$  și  $0 < (2 - \sqrt{3})^n < 1$ , rezultă că:

$$\left[ (2 + \sqrt{3})^n \right] = 2x_n - 1 \text{ și } \left\{ (2 + \sqrt{3})^n \right\} = 1 - (2 - \sqrt{3})^n.$$

Fie  $\varepsilon > 0$  dat. Relația  $|a_n - 1| < \varepsilon \Leftrightarrow (2 - \sqrt{3})^n < \varepsilon \Leftrightarrow n \ln(2 - \sqrt{3}) < \ln \varepsilon \Leftrightarrow n > \frac{\ln \varepsilon}{\ln(2 - \sqrt{3})}$ .

Așadar,  $|a_n - 1| < \varepsilon$ ,  $\forall n \geq n_\varepsilon = \max \left\{ 1, \left\lceil \frac{\ln \varepsilon}{\ln(2 - \sqrt{3})} \right\rceil + 1 \right\}$ . Luând  $\varepsilon = 10^{-10}$ , se obține concluzia.

**R.I.1.3.** Fie  $z = \frac{x \cdot y}{x^2 + y^2 + 2} \in A$ . Deoarece  $z \leq \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2}{x^2 + y^2 + 2} \right) < \frac{1}{2}$ , deducem că  $\alpha \leq \frac{1}{2}$ . Arătăm că numărul căutat  $\alpha$  este  $\frac{1}{2}$ . Presupunem contrariul, deci  $\alpha < \frac{1}{2}$ .

Atunci pentru orice  $x, y \in \mathbb{R}$ , avem:  $\frac{xy}{x^2 + y^2 + 2} \leq \alpha$ . Luăm  $y = x$  și obținem

loc pentru orice  $x \in \mathbb{R}$ , se obține o contradicție. Așadar,  $\alpha = \frac{1}{2}$ .

**Observație.** Numărul  $\alpha$  se numește infișumul mulțimii  $A$ .

**R.I.1.4.** Notăm  $S(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = \frac{x_1}{x_1 + x_2} + \frac{x_2}{x_2 + x_3} + \dots + \frac{x_9}{x_9 + x_{10}} + \frac{x_{10}}{x_{10} + x_1}$  și cu

$S = x_1 + x_2 + \dots + x_{10}$ , iar  $x_{11} = x_1$ .

Avem  $\frac{x_k}{S} \leq \frac{x_k}{x_k + x_{k+1}} = 1 - \frac{x_{k+1}}{x_k + x_{k+1}} \leq 1 - \frac{x_{k+1}}{S}, \forall k \in \overline{1, 10}$ .

Adunând inegalitățile anterioare obținem:  $1 \leq S(x_1, x_2, \dots, x_{10}) \leq 9$ . Arătăm că intervalul căutat este  $[a, b] = [1, 9]$ . Pentru aceasta, este suficient să arătăm că pentru orice  $a > 1$  există numerele pozitive  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  astfel ca  $S(a_1, a_2, \dots, a_{10}) < a$  și că, pentru orice  $b < 9$ , există numerele pozitive  $b_1, b_2, \dots, b_{10}$  astfel ca  $S(b_1, b_2, \dots, b_{10}) > b$ . Vom căuta numerele  $a_1, a_2, \dots, a_{10}$  și  $b_1, b_2, \dots, b_{10}$  în progresie geometrică:  $q, q^2, \dots, q^{10}$ .

Avem  $S(q, q^2, \dots, q^{10}) = \frac{q}{q+q^2} + \frac{q^2}{q^2+q^3} + \dots + \frac{q^9}{q^9+q^{10}} + \frac{q^{10}}{q^{10}+q} = \frac{9}{1+q} + \frac{q^9}{1+q^9}$ .

Pentru prima inegalitate, deoarece  $\frac{9}{1+q} + \frac{q^9}{1+q^9} < \frac{9}{1+q} + 1$  și inegalitatea:

$\frac{9}{1+q} + 1 < a \Leftrightarrow \frac{9}{q+1} < a - 1 \Leftrightarrow q > \frac{10-a}{a-1}$ , deducem că pentru  $q > \frac{10-a}{a-1}$  avem

$S(q, q^2, \dots, q^{10}) < a$ .

Pentru a doua inegalitate, avem:

$S(q, q^2, \dots, q^{10}) = \frac{9}{1+q} + \frac{q^9}{1+q^9} > \frac{9}{1+q}$  și trebuie să găsim  $q$  astfel ca

$\frac{9}{1+q} > b \Leftrightarrow 9 > b + b \cdot q \Leftrightarrow q < \frac{9-b}{b}$ .

Alegând  $0 < q < \frac{9-b}{b}$ , avem  $S(q, q^2, \dots, q^{10}) > b$  și se obține concluzia.

Respect pentru oameni și cărti

**R.I.2.1.** Adunăm relațiile:

$$3a_3 = a_2$$

$$4a_4 = 2a_3$$

$$\dots$$

$$na_n = (n-2)a_{n-1}$$

Obținem  $a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + na_n = a_2$ . Cum  $a_n > 0$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$  rezultă

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \leq a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + na_n < a_1 + 2a_2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2.$$

**R.I.2.2.** Pentru  $x = y = 0$ , din relația b) rezultă  $f(0) = 0$ . Pentru  $y = -x$  obținem:

$0 = f(0) = f(x) + f(-x)$ , deci  $f(-x) = -f(x)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ . Arătăm că  $f$  este crescătoare.

Fie  $a, b \in \mathbb{R}$  cu  $a > b$ . Atunci  $f(a-b) \geq 0$ .

Dar  $f(a-b) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b)$ . Rezultă  $f(a) \geq f(b)$ .

Se arată că  $f(q) = qf(1)$ ,  $\forall q \in \mathbb{Q}$ .

Din  $f(q) = qf(1)$ ,  $\forall q \in \mathbb{Q}$  și  $f$  crescătoare rezultă că  $f(x) = xf(1)$ ,  $\forall x \in \mathbb{R}$ , cu  $f(1) \geq 0$ .

**R.I.2.3.** Fie  $(f+g+h)(x) = k$ ,  $\forall k \in \mathbb{Z}$ . Deoarece 31 și 7 · 19 sunt prime, există  $k, l \in \mathbb{Z}$  astfel încât  $1 = 31k + 7 \cdot 19l$ . Atunci:

$$h(x+1) = h(x + 31k + 7 \cdot 19l) = h(x + 7 \cdot 19l) = k - f(x + 7 \cdot 19l) - g(x + 7 \cdot 19l) = k - f(x) - g(x) = h(x).$$

Deci,  $h$  are perioada 1, prin urmare  $h$  este constantă pe  $\mathbb{Z}$ . Analog se arată că  $f$  și  $g$  sunt constante.

**R.I.2.4.** Pentru  $m = 1$  obținem  $a_n = \frac{4n}{1+2n^2} \in A$  și deducem  $a_n < \frac{2}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ . Rezultă

că o condiție necesară pentru ca  $A \subset [a, \infty)$  este  $a < \frac{2}{n}$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}^*$ , deci  $a = 0$ . Din

inegalitatea mediilor avem  $\frac{4mn}{m^2 + 2n^2} \leq \frac{4mn}{2\sqrt{m^2 \cdot 2n^2}} = \sqrt{2}$ , astfel că  $b \leq \sqrt{2}$ . Arătăm că

$b = \sqrt{2}$ . Este suficient să arătăm că dacă  $b' \in (0, \sqrt{2})$ , atunci există  $m, n \in \mathbb{N}^*$  astfel

ca  $\frac{4mn}{m^2 + 2n^2} > b'$ . Din ultima relație rezultă:

$$b'(m^2 + 2n^2) - 4mn < 0 \Leftrightarrow b' \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 - 4 \frac{m}{n} + 2b' < 0 \Leftrightarrow b'x^2 - 4x + 2b' < 0 \quad \text{cu } x = \frac{m}{n}.$$

Ecuăția  $b'x^2 - 4x + 2b' = 0$  are  $\Delta = 16 - 8b'^2 > 0$  și rădăcinile reale  $x_1, x_2$  cu

respectiv oameni și cărti

$x_1 + x_2 = \frac{4}{b'} > 0$  și  $x_1 \cdot x_2 = 2 > 0$ , deci pozitive. Pentru orice număr rațional pozitiv

$x = \frac{m}{n}$  din intervalul  $(x_1, x_2)$  avem  $b'x^2 - 4x + 2b' < 0$ . În concluzie,  $A \subset [0, \sqrt{2}]$ .

1.3. Definiție. O mulțime  $A \subset \mathbb{R}$  este densă în  $\mathbb{R}$  dacă există elemente ale

$A$  în orice interval deschis  $(a, b) \subset \mathbb{R}$  astfel încât există elemente ale

$A$  care să se situeze între  $a$  și  $b$ . Elementele de la punctul mijlociu al intervalului

care verifică această proprietate se numesc întrezugători ai intervalului.

1.4. Proprietate. Dacă  $A$  este densă în  $\mathbb{R}$  atunci  $A \cap I$  este densă în  $I$ .

Demonstrație. Fie  $I = (a, b) \subset \mathbb{R}$  un interval deschis în  $\mathbb{R}$ .

Indupăzire. Dacă  $I \cap A = \emptyset$  atunci  $I \cap A = \emptyset$ .

Dacă  $I \cap A \neq \emptyset$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $a$  și  $b$ .

Indupăzire. Fie  $x \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $x$  și  $a$ .

Dacă  $x = a$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $a$  și  $x$ .

Dacă  $x < a$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $x$  și  $a$ .

Dacă  $x > a$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $x$  și  $a$ .

Indupăzire. Fie  $y \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $y$  și  $b$ .

Dacă  $y = b$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $b$  și  $y$ .

Dacă  $y < b$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $y$  și  $b$ .

Dacă  $y > b$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $b$  și  $y$ .

Indupăzire. Fie  $z \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $x$  și  $y$ .

Dacă  $z = x$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $x$  și  $z$ .

Dacă  $z < x$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $z$  și  $x$ .

Dacă  $z > x$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $x$  și  $z$ .

Indupăzire. Fie  $w \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $y$  și  $z$ .

Dacă  $w = y$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $y$  și  $w$ .

Dacă  $w < y$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $w$  și  $y$ .

Dacă  $w > y$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $y$  și  $w$ .

Indupăzire. Fie  $v \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $z$  și  $w$ .

Dacă  $v = z$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $z$  și  $v$ .

Dacă  $v < z$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $v$  și  $z$ .

Dacă  $v > z$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $z$  și  $v$ .

Indupăzire. Fie  $u \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $w$  și  $v$ .

Dacă  $u = w$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $w$  și  $u$ .

Dacă  $u < w$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $u$  și  $w$ .

Dacă  $u > w$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $w$  și  $u$ .

Indupăzire. Fie  $t \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $v$  și  $u$ .

Dacă  $t = v$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $v$  și  $t$ .

Dacă  $t < v$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $t$  și  $v$ .

Dacă  $t > v$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $v$  și  $t$ .

Indupăzire. Fie  $r \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $u$  și  $t$ .

Dacă  $r = u$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $u$  și  $r$ .

Dacă  $r < u$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $r$  și  $u$ .

Dacă  $r > u$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $u$  și  $r$ .

Indupăzire. Fie  $s \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $t$  și  $r$ .

Dacă  $s = t$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $t$  și  $s$ .

Dacă  $s < t$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $s$  și  $t$ .

Dacă  $s > t$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $t$  și  $s$ .

Indupăzire. Fie  $p \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $r$  și  $s$ .

Dacă  $p = r$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $r$  și  $p$ .

Dacă  $p < r$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $p$  și  $r$ .

Dacă  $p > r$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $r$  și  $p$ .

Indupăzire. Fie  $q \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $s$  și  $p$ .

Dacă  $q = s$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $s$  și  $q$ .

Dacă  $q < s$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $q$  și  $s$ .

Dacă  $q > s$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $s$  și  $q$ .

Indupăzire. Fie  $m \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $p$  și  $q$ .

Dacă  $m = p$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $p$  și  $m$ .

Dacă  $m < p$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $m$  și  $p$ .

Dacă  $m > p$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $p$  și  $m$ .

Indupăzire. Fie  $n \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $q$  și  $m$ .

Dacă  $n = q$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $q$  și  $n$ .

Dacă  $n < q$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $n$  și  $q$ .

Dacă  $n > q$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $q$  și  $n$ .

Indupăzire. Fie  $o \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $m$  și  $n$ .

Dacă  $o = m$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $m$  și  $o$ .

Dacă  $o < m$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $o$  și  $m$ .

Dacă  $o > m$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $m$  și  $o$ .

Indupăzire. Fie  $p \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $n$  și  $o$ .

Dacă  $p = n$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $n$  și  $p$ .

Dacă  $p < n$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $p$  și  $n$ .

Dacă  $p > n$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $n$  și  $p$ .

Indupăzire. Fie  $q \in I \cap A$ . Atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $o$  și  $p$ .

Dacă  $q = o$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $o$  și  $q$ .

Dacă  $q < o$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $q$  și  $o$ .

Dacă  $q > o$  atunci există elemente ale  $A$  care să se situeze între  $o$  și  $q$ .