Coordonator CRISTIAN HEUBERGER

Gheorghe Boroica Nicolae Muşuroia

Vasile Pop

Florin Bojor Cristian Heuberger

MATEMATICĂ DE EXCELENȚĂ

pentru concursuri, olimpiade şi centre de excelență

Clasa a XI-a

Volumul II. Analiză matematică

Ediția a II-a, revizuită

ÎNVĂȚARE DE EXCELENȚĂ®
supersucces

PARALELA 45
EDITURA

CUPRINS

TESTE INIŢIALE

TESTUL I.1

I.1.1. Fie $f:\mathbb{N}^*\to\mathbb{N}^*$ o funcţie injectivă şi şirul $(x_n)_{n\geq1}$, $x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{f^2(k)}{k^3}$. Arătaţi că pentru orice $M>0$ există $m\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $x_n>M$, $\forall n\geq m$.

I.1.2. Pentru fiecare $n\in\mathbb{N}^*$, considerăm $a_n=\left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}$. Arătaţi că există $n_0\in\mathbb{N}^*$ astfel încât $|a_n-1|<10^{-10}$, $\forall n\geq n_0$.

I.1.3. Fie mulţimea $A=\left\{\dfrac{x\,y}{x^2+y^2+2}\;\middle|\; x,y\in\mathbb{R}\right\}$. Determinaţi cel mai mic număr real α cu proprietatea că $z\leq\alpha$, $\forall z\in A$.

I.1.4. Determinaţi intervalul $[a, b]$ de lungime minimă astfel ca pentru orice numere reale strict pozitive $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$ să avem:

$$a\leq\frac{x_1}{x_1+x_2}+\frac{x_2}{x_2+x_3}+\ldots+\frac{x_9}{x_9+x_{10}}+\frac{x_{10}}{x_{10}+x_1}\leq b.$$

Vasile Pop

TESTUL I.2

I.2.1. Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq1}$ cu $a_1=\dfrac{1}{3}$, $a_2=\dfrac{5}{6}$ şi $(n+1)a_{n+1}=(n-1)a_n$, $\forall n\geq2$. Arătaţi că $a_1+a_2+\ldots+a_n<2$.

Lucian Dragomir, Gazeta Matematică, nr. 6-7-8, 2012

I.2.2. Determinaţi funcţia $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ cu proprietăţile:

a) $f(x)\geq0$, $\forall x\geq0$;

b) $f(x+y)=f(x)+f(y)$, $\forall x, y\in\mathbb{R}$.

I.2.3. Fie $f, g, h:\mathbb{Z}\to\mathbb{Z}$ funcţii periodice, de perioade 7, 19, respectiv 31. Arătaţi că dacă funcţia $f+g+h$ este constantă, atunci funcţiile f, g, h sunt constante.

I.2.4. Se consideră mulţimea de numere raţionale $A=\left\{\dfrac{4mn}{m^2+2n^2}\;\middle|\; m,n\in\mathbb{N}^*\right\}$. Determinaţi cel mai mare număr real a şi cel mai mic număr real b astfel încât $A\subset[a,b]$.

Vasile Pop

SOLUŢIILE TESTELOR INIŢIALE

TESTUL I.1

R.I.1.1. Şirul dat este strict crescător deoarece $x_{n+1}-x_n=\dfrac{f^2(n+1)}{(n+1)^3}>0$. Cum f este injectivă, avem $x_{2n}-x_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{f^2(k+n)}{(k+n)^3}\geq\dfrac{1}{(2n)^3}\cdot\sum\limits_{k=1}^{n}f^2(k+n)\geq\dfrac{1}{8n^3}(1^2+2^2+...+n^2)=$ $=\dfrac{(2n+1)(n+1)}{48n^2}>\dfrac{2n\cdot n}{48n^2}=\dfrac{1}{24}$, $\forall n\geq 1$. Atunci $x_{2^n}-x_1=\sum\limits_{k=1}^{n}(x_{2^k}-x_{2^{k-1}})>\sum\limits_{k=1}^{n}\dfrac{1}{24}=\dfrac{n}{24}$, deci $x_{2^n}>x_1+\dfrac{n}{4}\geq 1+\dfrac{n}{4}>\dfrac{n}{4}$, $\forall n\in\mathbb{N}^*$. Deoarece relaţia $\dfrac{n}{4}\geq M$ este adevărată pentru orice $n\geq[4M]+1$, deducem că $x_{2^n}>M$, $\forall n\geq[4M]+1\overset{\text{not}}{=}n_0$. Luăm $m=2^{n_0}\in\mathbb{N}^*$ şi se obţine concluzia, deoarece şirul este şi crescător.

R.I.1.2. Avem $\{a\}=a-[a]$, unde $[a]$ este partea întreagă a lui a. Aplicând binomul lui Newton rezultă că, pentru orice $n\in\mathbb{N}$, există $x_n, y_n\in\mathbb{Z}$ astfel ca:

$$\left(2+\sqrt{3}\right)^n=x_n+y_n\cdot\sqrt{3} \text{ şi } \left(2-\sqrt{3}\right)^n=x_n-y_n\cdot\sqrt{3}.$$

Deoarece $\left(2+\sqrt{3}\right)^n+\left(2-\sqrt{3}\right)^n=2x_n$ şi $0<\left(2-\sqrt{3}\right)^n<1$, rezultă că:

$$\left[\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right]=2x_n-1 \text{ şi } \left\{\left(2+\sqrt{3}\right)^n\right\}=1-\left(2-\sqrt{3}\right)^n.$$

Fie $\varepsilon>0$ dat. Relaţia $|a_n-1|<\varepsilon\Leftrightarrow\left(2-\sqrt{3}\right)^n<\varepsilon\Leftrightarrow n\ln\left(2-\sqrt{3}\right)<\ln\varepsilon\Leftrightarrow n>\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)}$.

Aşadar, $|a_n-1|<\varepsilon$, $\forall n\geq n_\varepsilon=\max\left\{1,\left[\dfrac{\ln\varepsilon}{\ln\left(2-\sqrt{3}\right)}\right]+1\right\}$. Luând $\varepsilon=10^{-10}$, se obţine concluzia.

R.I.1.3. Fie $z=\dfrac{x\ y}{x^2+y^2+2}\in A$. Deoarece $z\leq\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{2}{x^2+y^2+2}\right)<\dfrac{1}{2}$, deducem că $\alpha\leq\dfrac{1}{2}$. Arătăm că numărul căutat α este $\dfrac{1}{2}$. Presupunem contrariul, deci $\alpha<\dfrac{1}{2}$. Atunci pentru orice $x, y\in\mathbb{R}$, avem: $\dfrac{xy}{x^2+y^2+2}\leq\alpha$. Luăm $y=x$ şi obţinem

$x^2 \le \alpha(2x^2+2) \Leftrightarrow (1-2\alpha)x^2 \le 2\alpha \Leftrightarrow x^2 \le \dfrac{2\alpha}{1-2\alpha}$. Cum ultima relaţie trebuie să aibă loc pentru orice $x \in \mathbb{R}$, se obţine o contradicţie. Aşadar, $\alpha = \dfrac{1}{2}$.

Observaţie. Numărul α se numeşte infimumul mulţimii A.

R.I.1.4. Notăm $S(x_1, x_2, \dots, x_{10}) = \dfrac{x_1}{x_1+x_2} + \dfrac{x_2}{x_2+x_3} + \dots + \dfrac{x_9}{x_9+x_{10}} + \dfrac{x_{10}}{x_{10}+x_1}$ şi cu $S = x_1 + x_2 + \dots + x_{10}$, iar $x_{11} = x_1$.

Avem $\dfrac{x_k}{S} \le \dfrac{x_k}{x_k+x_{k+1}} = 1 - \dfrac{x_{k+1}}{x_k+x_{k+1}} \le 1 - \dfrac{x_{k+1}}{S}$, $\forall k \in \overline{1,10}$.

Adunând inegalităţile anterioare obţinem: $1 \le S(x_1, x_2, \dots, x_{10}) \le 9$. Arătăm că intervalul căutat este $[a, b] = [1, 9]$. Pentru aceasta, este suficient să arătăm că pentru orice $a > 1$ există numerele pozitive $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ astfel ca $S(a_1, a_2, \dots, a_{10}) < a$ şi că, pentru orice $b < 9$, există numerele pozitive $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ astfel ca $S(b_1, b_2, \dots, b_{10}) > b$. Vom căuta numerele $a_1, a_2, \dots, a_{10}$ şi $b_1, b_2, \dots, b_{10}$ în progresie geometrică: $q, q^2, \dots, q^{10}$. Avem $S(q, q^2, \dots, q^{10}) = \dfrac{q}{q+q^2} + \dfrac{q^2}{q^2+q^3} + \dots + \dfrac{q^9}{q^9+q^{10}} + \dfrac{q^{10}}{q^{10}+q} = \dfrac{9}{1+q} + \dfrac{q^9}{1+q^9}$.

Pentru prima inegalitate, deoarece $\dfrac{9}{1+q} + \dfrac{q^9}{1+q^9} < \dfrac{9}{1+q} + 1$ şi inegalitatea:

$\dfrac{9}{1+q} + 1 < a \Leftrightarrow \dfrac{9}{q+1} < a - 1 \Leftrightarrow q > \dfrac{10-a}{a-1}$, deducem că pentru $q > \dfrac{10-a}{a-1}$ avem $S(q_1, q^2, \dots, q^{10}) < a$.

Pentru a doua inegalitate, avem:

$S(q, q^2, \dots, q^{10}) = \dfrac{9}{1+q} + \dfrac{q^9}{1+q^9} > \dfrac{9}{1+q}$ şi trebuie să găsim q astfel ca

$\dfrac{9}{1+q} > b \Leftrightarrow 9 > b + b \cdot q \Leftrightarrow q < \dfrac{9-b}{b}$.

Alegând $0 < q < \dfrac{9-b}{b}$, avem $S(q, q^2, \dots, q^{10}) > b$ şi se obţine concluzia.

TESTUL I.2

R.I.2.1. Adunăm relațiile:

$$3a_3 = a_2$$
$$4a_4 = 2a_3$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$na_n = (n-2)a_{n-1}$$

Obținem $a_3 + a_4 + \dots + a_{n-1} + na_n = a_2$. Cum $a_n > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$ rezultă

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n \le a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + na_n < a_1 + 2a_2 = \frac{1}{3} + \frac{5}{3} = 2.$$

R.I.2.2. Pentru $x = y = 0$, din relația b) rezultă $f(0) = 0$. Pentru $y = -x$ obținem: $0 = f(0) = f(x) + f(-x)$, deci $f(-x) = -f(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Arătăm că f este crescătoare. Fie $a, b \in \mathbb{R}$ cu $a > b$. Atunci $f(a-b) \ge 0$.
Dar $f(a-b) = f(a) + f(-b) = f(a) - f(b)$. Rezultă $f(a) \ge f(b)$.
Se arată că $f(q) = qf(1)$, $\forall q \in \mathbb{Q}$.
Din $f(q) = qf(1)$, $\forall q \in \mathbb{Q}$ și f crescătoare rezultă că $f(x) = xf(1)$, $\forall x \in \mathbb{R}$, cu $f(1) \ge 0$.

R.I.2.3. Fie $(f+g+h)(x) = k$, $\forall k \in \mathbb{Z}$. Deoarece 31 și $7 \cdot 19$ sunt prime, există $k, l \in \mathbb{Z}$ astfel încât $1 = 31k + 7 \cdot 19l$. Atunci:
$h(x+1) = h(x + 31k + 7 \cdot 19l) = h(x + 7 \cdot 19l) = k - f(x + 7 \cdot 19l) - g(x + 7 \cdot 19l) =$
$= k - f(x) - g(x) = h(x)$.
Deci, h are perioada 1, prin urmare h este constantă pe $\mathbb{Z}$. Analog se arată că f și g sunt constante.

R.I.2.4. Pentru $m = 1$ obținem $a_n = \dfrac{4n}{1+2n^2} \in A$ și deducem $a_n < \dfrac{2}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$. Rezultă că o condiție necesară pentru ca $A \subset [a, \infty)$ este $a < \dfrac{2}{n}$, $\forall n \in \mathbb{N}^*$, deci $a = 0$. Din inegalitatea mediilor avem $\dfrac{4mn}{m^2 + 2n^2} \le \dfrac{4mn}{2\sqrt{m^2 \cdot 2n^2}} = \sqrt{2}$, astfel că $b \le \sqrt{2}$. Arătăm că $b = \sqrt{2}$. Este suficient să arătăm că dacă $b' \in \left(0, \sqrt{2}\right)$, atunci există $m, n \in \mathbb{N}^*$ astfel ca $\dfrac{4mn}{m^2 + 2n^2} > b'$. Din ultima relație rezultă:

$$b'(m^2 + 2n^2) - 4mn < 0 \Leftrightarrow b' \cdot \left(\frac{m}{n}\right)^2 - 4\frac{m}{n} + 2b' < 0 \Leftrightarrow b'x^2 - 4x + 2b' < 0 \quad \text{cu} \quad x = \frac{m}{n}.$$

Ecuația $b'x^2 - 4x + 2b' = 0$ are $\Delta = 16 - 8b'^2 > 0$ și rădăcinile reale x_1, x_2 cu $x_1 + x_2 = \dfrac{4}{b'} > 0$ și $x_1 \cdot x_2 = 2 > 0$, deci pozitive. Pentru orice număr rațional pozitiv $x = \dfrac{m}{n}$ din intervalul (x_1, x_2) avem $b'x^2 - 4x + 2b' < 0$. În concluzie, $A \subset \left[0, \sqrt{2}\right]$.